

115學年度中區縣市政府教師甄選策略聯盟

【科目名稱：國中數學】

選擇題【共50題，每題2分，共100分】請以2B鉛筆於答案卡上作答，單選題；答錯不倒扣。

- 已知 x, y, z 皆為實數，滿足 $x+y+z=3$ ，且 $x-y=1$ 。試問 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值為何？
(A) 3 (B) $\frac{7}{2}$ (C) 4 (D) $\frac{9}{2}$
- 已知 $x^2+2x+6=5\sqrt{x^2+2x+12}$ 有二個實根，求這二個實根的和為
(A) -6 (B) 4 (C) 2 (D) -2
- 某校數學科辦公室有一條規定：「如果今天下午有召開教學研討會，則所有數學老師都不能請假。」若已知此敘述為真，則下列哪一個敘述必為真？
(A)若今天下午所有數學老師都沒請假，則今天下午一定有召開教學研討會
(B)若今天下午沒有召開教學研討會，則數學老師們可以請假
(C)若今天下午有一位數學老師請假了，則今天下午一定沒有召開教學研討會
(D)只有在召開教學研討會時，數學老師才不能請假
- 甲、乙、丙三人中有一人打破教室窗戶，老師詢問三人是誰打破，三人分別做以下回答：甲說「是乙打破的」，乙說「是丙打破的」，丙說「乙在說謊」。若已知三人中恰有一人說實話，則打破教室窗戶的人是誰？
(A)甲 (B)乙 (C)丙 (D)無法判斷
- 滿足絕對值不等式 $|x+5|+|x-3|\leq 12$ 的整數 x 共有幾個？
(A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 15
- 設 $f(x)$ 為一個實係數多項式，且 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為3，除以 $x-2$ 的餘式為5，求 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式。
(A) $2x+1$ (B) $2x-1$ (C) $x+2$ (D) $3x-1$
- 設 x, y 為正實數，且 $2x+3y=12$ ，求 x^2y^3 的最大值。
(A) 72 (B) 32 (C) $\frac{12^5}{2^23^3}$ (D) $\left(\frac{12}{5}\right)^5$
- 求方程式 $\log_2(4-x^2)-\log_2 x=3$ 的實數解個數。
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 求 $(1+x^2)^2(1+x)^{10}$ 的展開式中， x^4 項係數。
(A) 255 (B) 300 (C) 301 (D) 302
- 將5本不同的書全部分給甲、乙、丙三人，每人至少得一本，共有幾種分法？
(A) 243 (B) 540 (C) 125 (D) 150
- 若 $f(x)=\int_{-x}^x \sin s ds$ ，則 $f'(1)=$
(A) 0 (B) $\sin 1$ (C) $2\sin 1$ (D) $-\sin 1$
- 設 $a \in \mathbb{R}$ ，若空間中兩直線 $L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+2}{a}$ 與 $L_2: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ 交於一點，求 a 的值。
(A) -1 (B) 1 (C) -2 (D) 2
- 袋中有4白球、3黑球，從中取球，每次取一球，取後不放回，直到黑球取完為止。求黑球比白球先取完的機率。
(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{4}{7}$
- $\triangle ABC$ 滿足 $\sin A : \sin B = 3:5$ ，外接圓半徑與內切圓半徑的比值為 $\frac{14}{3}$ ，且其周長為30，求此三角形面積。
(A) $15\sqrt{3}$ (B) $12\sqrt{3}$ (C) $30\sqrt{3}$ (D) 24
- 設 $x \in \mathbb{R}$ ，求 $\sin^2 x - 4\sin x + 5$ 的最小值。
(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 10

16. 橢圓 $3x^2 + 2y^2 + xy = 8$ ，在(0,2)的切線斜率為
 (A) $-\frac{1}{4}$ (B) 4 (C) -4 (D) -2
17. $(G, *, e)$ 若是代數中的一個群， $*$ 是其中的二元運算， e 是運算的單位元(identity)，下列何者不一定對？
 (A)任意 $a \in G$ ，一定存在 $b \in G$ 使得 $a*b = b*a = e$
 (B)若 $a, b \in G$ ，則 $a*b = b*a$
 (C)若 $a, b, c \in G$ ，則 $(a*b)*c = a*(b*c)$
 (D)若 $a, b \in G$ 且 $a*b = e$ ，則 $b*a = e$
18. 考慮複數平面，若 i 是虛數， $\sum_{k=0}^{\infty} (1+i)^{2k} z^k$ 收斂半徑是
 (A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) $\sqrt{2}$
19. 下列何者是微分方程式 $y' = 2xy^2$ ， $y(1) = 1$ 的解？
 (A) $\frac{1}{2-x^2}$ (B) $-x^2 + 2$ (C) $x^2 - 2$ (D) $\frac{1}{x}$
20. 複數 z_1, z_2 滿足 $|z_1| = 2$ ， $|z_2| = 3$ ，且 $\text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) = 120^\circ$ ，求 $|z_1 + z_2|$ 。
 (A) $\sqrt{19}$ (B) $\sqrt{13}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) 5
21. 設數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = 1$ ，當 $n \geq 1$ 時， $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$ ，求最小 n 使得 $|a_n - 6| < 10^{-3}$ 。
 (A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16
22. 求 $\sum_{n=1}^{50} \sin \frac{n\pi}{3} \cos \frac{n\pi}{4}$ 的值。
 (A) 0 (B) $\sqrt{6}/4$ (C) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$ (D) $(\sqrt{6} + \sqrt{3})/4$
23. 設 $a, b \in \mathbb{R}$ ，方程式 $x^3 + x^2 + ax + b = 0$ 其三根在複數平面上形成一個三角形的三頂點，此三角形面積為24，已知此方程式的其中一根為5，求 $a + b$ 。
 (A) -98 (B) 98 (C) 102 (D) -102
24. 已知五位數 $32a18$ 可被9整除，求 a 的值。
 (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
25. 求 $2^{3^{100}}$ 除以5的餘數。
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
26. 設 $n \in \mathbb{N}$ ， n 除以5的餘數為2，除以7的餘數為3，求 n 除以35的餘數。
 (A) 5 (B) 10 (C) 17 (D) 31
27. 設 $n \in \mathbb{Z}$ ，且 $\frac{3n+2}{2n-1} \in \mathbb{Z}$ ，求所有可能的 n 的總和。
 (A) -4 (B) -2 (C) 4 (D) 2
28. 求小於等於2026且與2026互質的正整數個數。
 (A) 1011 (B) 1012 (C) 1013 (D) 2025
29. 設 $a, b \in \mathbb{N}$ ，且存在正整數 q_1, q_2, q_3, r_1, r_2 ，使得 $a = bq_1 + r_1$ ， $b = r_1q_2 + r_2$ ， $r_1 = r_2q_3$ ，下列何者為 a, b 的最大公因數？
 (A) r_1 (B) r_2 (C) 0 (D) q_3
30. 關於 $100! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 100$ ，下列何者正確？
 (A) $100!$ 的末尾連續出現20個0
 (B) 若 $100!$ 能被 3^k 整除，則整數 k 的最大值為33
 (C) $100! + 1$ 的質因數必大於100
 (D) $100!$ 為完全平方數

31. 已知矩陣 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ，求 $A^4 - 5A^3 + 3A^2 + 7A$ 。

- (A) $\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 48 & 22 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 22 & 11 \\ 44 & 31 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 24 & 12 \\ 48 & 36 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 22 & 12 \\ 48 & 34 \end{pmatrix}$

32. 設 n 為正整數， V 為所有 $n \times n$ 實矩陣所構成的向量空間， $W = \{A \in V \mid A^T = A\}$ 為 V 的子空間，求 W 的維度。

- (A) n^2 (B) $\frac{n(n-1)}{2}$ (C) $\frac{n(n+1)}{2}$ (D) n

33. 設 A 為一個 3×2 階的矩陣， B 為一個 2×3 階的矩陣，且 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，下列何者為真？

- (A) $\text{tr}(BA) = 2$ (B) $\det(AB) = 1$ (C) A 是可逆矩陣 (D) BA 為零矩陣

34. 求 $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x \, dx$ 的值。

- (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 0

35. 已知平面一曲線的參數方程式為 $x = e^t$ ， $y = t^2$ ，求此曲線在 $t = 2$ 時的二階導數 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

- (A) $2e^{-2}$ (B) $-2e^{-2}$ (C) $-2e^{-4}$ (D) 0

36. 設 A 表曲線 $y = \sqrt{x}$ 、 x 軸以及 $x = 4$ 所圍成的封閉區域，求 A 繞 x 軸旋轉一周所形成的旋轉體體積。

- (A) 2π (B) 4π (C) 6π (D) 8π

37. 求極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{2(n+2i)^3}{n^4} \right)$ 。

- (A) 10 (B) 20 (C) 40 (D) 80

38. 設 $f(x) = \int_0^{\sin x} e^{-t^2+1} \, dt$ ，求 $f'(0)$ 。

- (A) e (B) e^2 (C) 0 (D) 1

39. 已知矩陣 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ，若 $A^{10} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ，求 a_{12} 。

- (A) 5120 (B) 1 (C) 10 (D) 1024

40. 設 $k, r \in \mathbb{R}$ ，下列對於 x, y, z 的三元一次方程組 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + kz = r \end{cases}$ ，何者正確？

- (A) 當 $k = 4$ 且 $r = 3$ 時，方程組無解
(B) 當 $k = 4$ 且 $r = 5$ 時，方程組恰有一解
(C) 當 $k = 4$ 且 $r = 3$ 時，方程式所代表的空間中三平面交於一直線
(D) 當 $k = 4$ 且 $r = 5$ 時，方程式所代表的空間中三平面中，兩個平行，另一個與這兩個分別交於一直線

41. 已知線性變換 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 定義為 $T(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ，其中 A 為一個二階實方陣。下面敘述何者正確？

- (A) 當 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 時， T 為以原點為對稱中心的點對稱變換
(B) 當 $A = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$ 時， T 為以原點為中心的旋轉變換
(C) 當 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 時， T 為對 y 軸做投影的投影變換
(D) 當 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 時， T 為以 y 軸為對稱軸的線對稱變換

42. 已知 $(x-5)^4 + (x-1)^4 = 196$ 有二個實根，求這二個實根的和為

- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

43. 設平面參數曲線 $r(t) = (t^2, \frac{2}{3}t^3)$ 。試問此曲線在區間 $[0,1]$ 上的弧長為何？

- (A) $\sqrt{2}-1$ (B) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ (C) $\frac{1}{2}(2\sqrt{2}-1)$ (D) $\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$

44. 求 2^{103} 除以 101 的餘數。

- (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

45. 試問 $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$ 之值為何？

- (A) $\frac{\pi}{8}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 1

46. 設 $f(x, y, z) = x^2y + yz$ 。試問 f 在點 $(1, -1, 2)$ 沿方向 $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 的方向導數為何？

- (A) -3 (B) -1 (C) 0 (D) 1

47. 設函數 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 。下列何者正確？

- (A) f 在 $(0,0)$ 的兩個偏導數都存在，但 f 在 $(0,0)$ 不連續
(B) f 在 $(0,0)$ 連續，但不可微
(C) f 在 $(0,0)$ 的所有方向導數都存在，所以 f 在 $(0,0)$ 可微
(D) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ 不存在

48. 設 V 為 5 維實向量空間。已知線性算子 $T: V \rightarrow V$ 滿足 $T^2 = 3T$ 以及 $\text{tr}(T) = 6$ 。試問 T 的零空間之維度 $\dim \text{Ker}(T)$ 為何？

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

49. 試問 $\int_0^1 \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2+1} dx$ 之值為何？

- (A) $\ln 2$ (B) $\ln 3$ (C) $2\ln 2$ (D) 1

50. 求重積分 $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy$ 的值。

- (A) $1-e$ (B) $e-1$ (C) $\frac{1}{2}(e-1)$ (D) $\frac{1}{2}e$